Die

Bewegung eines materiellen Punktes

auf

Rotationsflächen

mit vertikalen Axen,

[Paraboloid, Kegel.]

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät

zu

Marburg

eingereicht von

THEODOR BERTRAM

aus

Anderbeck.

Marburg 1876.

Seinem väterlichen Freunde

Herrn Schott,

Ober-Hütteninspector zu Ilsenburg,

als ein Zeichen

dankbarer Verehrung und Hochachtnug

gewidmet

vom

Verfasser.

Die folgenden Entwicklungen sollen einen Beitrag liefern zur Kenntniss von der Bewegung eines materiellen Punktes, der gezwungen ist, sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer Rotationsfläche zu bewegen, deren Axe vertical steht. Zunächst werden die Bewegungsgleichungen, soweit es möglich ist, allgemein für Rotationsflächen mit verticaler Axe integrirt werden, um dann an der Hand der so gewonnenen Resultate die Bewegung auf dem Rotations-Paraboloid und -Kegel einer eingehenderen Untersuchung zu unterwerfen.

§. 1. Bewegung auf der allgemeinen Rotationsfläche $x^2+y^2-f(z)^2=0$.

Die Gleichung $x^2+y^2-f(z)^2=0$, oder kürzer $F(x,y,z)=0$, stellt eine auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Rotationsfläche dar, deren Rotationsaxe zugleich Axe der z ist. Die Meridiancurve hat die Gleichung $r=f(z)$, wenn r die Abscisse in dem Coordinatensysteme eines Meridianschnittes bezeichnet. Die Allgemeinheit der Entwicklung wird nicht beeinträchtigt, wenn wir die Masse des beweglichen Punktes gleich der Einheit setzen; nehmen wir ausserdem die Richtung der Schwerkraft derjenigen der positiven z entgegengesetzt, so sind die allgemeinen Bewegungsgleichungen unseres Punktes bekanntlich gegeben durch folgende Gleichungen:

$$\text{II.} \quad 1)\ \frac{d^2x}{dt^2}=N.V.\frac{\partial F}{\partial x};\ 2)\ \frac{d^2y}{dt^2}=N.V.\frac{\partial F}{\partial y};\ 3)\ \frac{d^2z}{dt^2}=N.V.\frac{\partial F}{\partial z}-g;$$

worin N den noch unbekannten Normalwiderstand der Fläche bedeutet und der Kürze halber $V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$ gesetzt ist.

Da die resultirende beschleunigende Kraft sich in jedem Moment aus der parallel der Axe der z gerichteten Schwerkraft und dem Normalwiderstande der Fläche zusammensetzt, welche für den Fall unserer Rotationsflächen in ihrer Richtung immer diese Axe schneidet, so wird die Resultirende mit der Axe der z immer in einer Ebene liegen. Für die Projection der Bewegung auf die Ebene der xy können wir somit von dem Flächenprincip Gebrauch machen. Dasselbe ergiebt

III. $$x dy - y dx = C.dt; \quad \text{oder} \quad r^2.d\omega = C.dt,$$

wenn C eine noch zu bestimmende Constante, und $[r, \omega]$ die Polarcoordinaten für die Projection der Bahn auf die Ebene der xy bezeichnet.

Da ferner die von dem Normalwiderstande der Fläche geleistete Arbeit in jedem Momente gleich Null ist (sie steht ja senkrecht auf der Bahn des Punktes), so liefert uns das Princip der lebendigen Kraft ein anderes erstes Integral unserer Gleichungen II,

IV. $$v^2 \equiv \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2gz + C',$$

wenn v die Geschwindigkeit des Punktes und C' eine zweite willkürliche Constante bezeichnet.

Zur Bestimmung der Constanten C und C' genügt die Kenntniss des Bewegungszustandes an einem bestimmten Punkte. Der Punkt $A[x_0, y_0, z_0]$ auf der Fläche $F = 0$ habe die Coordinaten

$$z_0 = h; \quad y_0 = 0; \quad x_0 = f(h);$$

und dort möge der bewegliche Punkt [M möge kurz ihn bezeichnen] eine Geschwindigkeit v_0, in der Richtung der Tangente an den durch A laufenden Parallelkreis, besitzen, so dass, wenn auch die Zeit von dem Momente an gerechnet wird, wo M sich in A befindet, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = v_0$ ist. Dann folgt aus III. $x_0 \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} - y_0 \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = C = f(h).v_0$; und aus IV. $v_0^2 = -2gz_0 + C'$ oder $C' = 2gh + v_0^2$.

Wir erhalten somit folgende zwei Differentialgleichungen erster Ordnung:

III^a. $$x dy - y dx [\equiv r^2 d\omega] = v_0 . f(h) . dt;$$

IV^a. $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 [\equiv v^2] = 2g(h-z) + v_0^2.$$

Diese verbinden wir mit der Gleichung der Fläche

$$x^2 + y^2 = f(z)^2,$$

und ihrem ersten Differential

V. $$x dx + y dy = f(z) . f'(z) . dz.$$

[V]^2+[III^a] giebt

$$(x^2+y^2)[dx^2+dy^2] = f(z)^2 f'(z)^2 . dz^2 + v_0^2 . f(h)^2 . dt^2;$$

oder

$$f(z)^2 \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = f(z)^2 . f'(z)^2 . \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + v_0^2 . f(h)^2;$$

woraus, mit Rücksicht auf IV^a, leicht abgeleitet wird:

VI. $$dt = \mp \sqrt{\frac{1+f'(z)^2}{f(z)^2[2g(h-z)+v_0^2] - v_0^2 f(h)^2}} . f(z)\, dz.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in III^a. findet man dann

VII. $$d\omega = \mp \sqrt{\frac{1+f'(z)^2}{f(z)^2[2g(h-z)+v_0^2] - v_0^2 f(h)^2}} . \frac{v_0 . f(h)}{f(z)} . dz.$$

Für das Bogendifferential der Bahn folgt aus IV^a. und VI. mit Rücksicht auf $v = \frac{ds}{dt}$,

VIII. $$ds = \mp \sqrt{\frac{[1+f'(z)^2][2g(h-z)+v_0^2]}{f(z)^2[2g(h-z)+v_0^2] - v_0^2 . f(h)^2}} . f(z)\, dz.$$

Auch der Winkel, den die Tangente an einem Punkte der Bahn mit der Tangente des zugehörigen Parallelkreises bildet, lässt sich leicht bestimmen. In dem Elementardreieck RPQ, sei PR ein Element der Bahncurve ds; PQ sei der durch P laufende Parallelkreis, und QR der durch R bestimmte Meridian irgend einer Rotationsfläche. Da in Q die Parallelkreise und Meridiane sich senkrecht schneiden, so ist

$$\cos QPR = \frac{QP}{PR}, \quad \text{d. h.} \quad \cos\tau = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\frac{d\sigma}{dt}}{\frac{ds}{dt}},$$

wenn $d\sigma$ das Bogendifferential des Parallelkreises bezeichnet. Nun ist

$$\frac{d\sigma}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}; \quad \text{und} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h-z)+v_0^2};$$

aus III^a. folgt aber

$$r \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{v_0 \cdot f(h)}{r} = \frac{v_0 \cdot f(h)}{f(z)};$$

also

IX. $$\cos\tau = \frac{v_0 \cdot f(h)}{f(z)\sqrt{2g(h-z)+v_0^2}}.$$

Durch die bisher gefundenen Ausdrücke ist es möglich, alle wesentlichen Elemente der Bahn durch einfache Quadraturen zu finden, sobald die Function $f(z)$ specialisirt ist. Ist $f(z)$ aber eine transcendente Function, so bieten sich der Integration zu grosse Hindernisse; ja schon bei algebraischer Form von $f(z)$ werden die Integrale als Argument eine Quadratwurzel aus einem Polynom 5ten und höheren Grades der Variabelen enthalten, wenn $f(z)^2$ ein Binom nur vom 2ten Grade mit zwei verschiedenen Parametern ist.

Die einzige Fläche, welche ein algebraisches Integral ergiebt, ist die Cylinderfläche

$$x^2+y^2 = a^2;$$

man findet aus VI. und VII. leicht durch Einführung der Werte $f(z) = a$; $f'(z) = 0$:

$$[a,\omega]^2 = 2.\frac{v_0^2}{g}(h-z),$$

woraus ersichtlich, dass die durchlaufene Bahn bei der Abwicklung des Cylinders auf einer Ebene eine Parabel darstellt.

Die Kugel

$$x^2+y^2 = a^2-z^2$$

hat wegen ihrer praktischen Bedeutung für das Pendel schon ausreichende Untersuchungen gefunden. Aber schon für diese Fläche werden jene Quadraturen elliptische Integrale. Letzteres gilt auch von dem Rotations-Paraboloide und -Kugel, wie wir im folgenden sehen werden. Die übrigen Rotationsflächen 2ten Grades führen schon zu höheren Transcendenten.

§. 2. Bewegung auf dem Rotations-Paraboloid.

Die Gleichung eines Rotations-Paraboloides dessen Rotationsaxe zur Axe der z, und dessen Scheitel zum Coordinaten-Anfang genommen wird, ist

$$x^2+y^2 = 2az;$$

so dass die Function $f(z)$ in den Formeln des §. 1. zu ersetzen ist durch $\sqrt{2az}$; also $f'(z) = \sqrt{\frac{a}{2z}}$. Es ergiebt sich daraus für die Componente der Geschwindigkeit des beweglichen Punktes genommen nach der Axe der z der Ausdruck:

I. $$\frac{dz}{dt} = \mp\sqrt{2g}\sqrt{\frac{(h-z)\left(z-\frac{v_0^2}{2g}\right)}{z+\frac{a}{2}}}.$$

Das doppelte Vorzeichen weist schon darauf hin, dass die Bewegung eine auf- und absteigende sein wird, und veranlasst die Bestimmung der Höhe und Tiefe, zwischen denen das Steigen und Fallen stattfindet.

Die Geschwindigkeitscomponente $\frac{dz}{dt}$ wird Null für die beiden Werte

$$z = h, \quad \text{und} \quad z = \frac{v_0^2}{2g};$$

sehen wir also zu, welche Richtung die Beschleunigungscomponente $\frac{d^2z}{dt^2}$ für diese beiden Werte erhält. Es ist aber

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \mp\sqrt{2g}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{z+\frac{a}{2}}{(h-z)\left(z-\frac{v_0^2}{2g}\right)}} \times \frac{\left(z+\frac{a}{2}\right)\left(h-z+\frac{v_0^2}{2g}-z\right)-(h-z)\left(z-\frac{v_0^2}{2g}\right)}{\left(z+\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\frac{dz}{dt},$$

$$= +g\left\{\frac{\frac{v_0^2}{2g}-z}{z+\frac{a}{2}}+\frac{h-z}{\left(z+\frac{a}{2}\right)^2}\left(\frac{a}{2}+\frac{v_0^2}{2g}\right)\right\};$$

woraus unmittelbar folgt, dass

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{z=h} = g\cdot\frac{\frac{v_0^2}{2g}-h}{h+\frac{a}{2}} \gtrless 0, \quad \text{je nachdem} \quad v_0 \gtrless \sqrt{2gh},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{z=\frac{v_0^2}{2g}} = g \cdot \frac{\left(h - \frac{v_0^2}{2g}\right)}{\frac{v_0^2}{2g} + \frac{a}{2}} \gtrless 0, \quad \text{je nachdem} \quad v_0 \gtrless \sqrt{2gh}.$$

Da die Geschwindigkeitcomponente $\frac{dz}{dt}$ aber für keinen anderen Wert von z zu Null wird, so ersieht man aus diesen Resultaten, dass der bewegliche Punkt, wenn $v_0 > \sqrt{2gh}$, von dem tiefsten Punkte $z = h$ bis zum höchsten $z = \frac{v_0^2}{2g}$ steigen, dann eine fallende Bewegung annehmen wird, bis er wieder zum tiefsten Punkte gelangt ist, um von da die Bewegung in derselben Weise zu wiederholen. Ist dagegen $v_0 < \sqrt{2gh}$, so beginnt die Bewegung in $z = h$ aus dem höchsten Punkte, fällt bis zum tiefsten Punkte $z = \frac{v_0^2}{2g}$, und steigt dann wieder bis $z = h$.

Der bewegliche Punkt oscillirt bei seiner Bewegung zwischen den beiden horizontalen Ebenen $z = h$ und $z = \frac{v_0^2}{2g}$. Da die Geschwindigkeit

$$v^2 = 2g(h - z) + v_0^2$$

für keinen Wert von z zwischen den Grenzen $\left|\begin{matrix} \frac{v_0^2}{2g} \\ h \end{matrix}\right.$ zu Null wird, so wird die Bewegung nie aufhören können.

Der Fall $v_0 = \sqrt{2gh}$ erledigt sich nach dem Vorhergehenden von selbst; denn er sagt aus, dass die beiden Grenzebenen $\left[h = \frac{v_0^2}{2g}\right]$ zusammenfallen; d. h. der bewegliche Punkt muss sich immer in derselben Horizontalebene bewegen, er beschreibt den durch $z = h = \frac{v_0^2}{2g}$ bestimmten Parallelkreis. Die Geschwindigkeit $v^2 = 2g(h - z) + v_0^2$ bleibt in diesem Falle constant v_0. Die Dauer eines Umlaufes findet sich also zu

$$T = \frac{2\pi \cdot \sqrt{2ah}}{v_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Es verschwindet die Höhe (h) ganz aus diesem Ausdruck, und wir haben das merkwürdige Resultat, dass die Umlaufszeit (T) auf dem Rotations-Paraboloide für alle Höhen (h) dieselbe bleibt. Es ist diese Fläche aber auch die einzige, welche diese Eigenschaft besitzt; wie man leicht durch folgende Betrachtung einsieht. Es ist

$$T = \frac{\text{Parallelkreis}}{v_0} = \frac{2\pi \,.\, x}{\sqrt{2g.z}};$$

es ist aber dieser Ausdruck constant nur für $x^2 = z$ Const., d. h. die Meridiancurve muss eine Parabel sein.

Noch eine Bemerkung über das Vorzeichen der Constanten a in der Gleichung $x^2+y^2 = 2az$ möge hier Platz greifen. Dasselbe ist stillschweigend als positiv angenommen, d. h. das Paraboloid mit seiner concaven Seite nach oben gerichtet, also ganz auf der positiven Seite der z vorausgesetzt. Sollte $a < 0$ sein, so würden nicht alle bis jetzt gemachten Schlüsse stichhaltig sein; es würde h auch negativ sein müssen. Eine einfache Zerlegung der wirkenden Kräfte (die Beschleunigung und Centrifugalkraft) in ihre Componenten längs Flächennormale und in der Tangentialebene zeigt aber schon für für diesen Fall, dass der bewegliche Punkt beständig fallen muss. Die Bahn würde somit sich nach unten in's Unendliche ersrecken; da besondere Eigentümlichkeiten ihr fehlen würden, so mag dieser Fall von der weiteren Untersuchung ausgeschlossen bleiben.

Zur Vereinfachung wollen wir die beiden die Grenzebenen bestimmenden Werte von z so bezeichnen, dass $z = \gamma$ immer die obere, $z = \beta$ die untere Ebene bestimmt; so dass also

$$z = \frac{v_0^2}{2g} = \begin{cases} \gamma & \text{wenn } v_0 > \sqrt{2gh} \\ \beta & \text{„ } v < \sqrt{2gh} \end{cases}, \quad z = h = \begin{cases} \beta & \text{wenn } v_0 > \sqrt{2gh} \\ \gamma & \text{„ } v_0 < \sqrt{2gh} \end{cases};$$

Setzen wir ausserdem $-\frac{a}{2} = \alpha$, so erscheint die Formel I. in folgender Gestalt:

$$\text{II.} \quad dt = \pm \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{(z-\alpha)\,dz}{\sqrt{-(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}}; \quad [\alpha < \beta < \gamma]$$

Die Zeit t ist hierdurch als ein elliptisches Integral der Variabelen z gegeben, deren Grenzen $z\Big|_{\beta}^{\gamma}$ sind.

Führen wir folgende Substitution ein:

$$z = \frac{\beta - \alpha \,.\, k^2 \sin^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \quad \text{worin } k^2 = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$$

so erhalten wir, wenn $1 - k^2\sin^2\varphi = \Delta^2\varphi$ gesetzt wird:

$$\text{III.} \qquad dt = \mp \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{2(\beta-\alpha)}{\sqrt{\gamma-\alpha}} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi}.$$

Hierin entsprechen sihh die Grenzen der verschiedenen Variabelen in folgender Weise:

$$z \Big| \begin{matrix} \gamma \\ \beta \end{matrix} \quad \dots \sin^2\varphi \Big| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \dots \varphi \Big| \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{matrix}$$

Führt man die bekannte Bezeichnungsweise ein:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \varphi = amu, \quad E(u) = \int_0^{\varphi} \Delta\varphi \,.\, d\varphi, \quad k'^2 = 1 - k^2,$$

so gilt folgende Relation *):

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} = \frac{1}{k'^2} \left\{ E(u) - k^2 \,.\, \frac{\sin amu \,.\, \cos amu}{\Delta amu} \right\}.$$

Integriren wir also III. von $z = \beta$ bis $z = z_1$, so erhalten wir die Zeit t_1, welche vom Beginn der aufsteigenden Bewegung von der unteren Grenzebene aus, bis dahin verflossen ist, wo der bewegliche Punkt bis zur Höhe $z = z_1$ gestiegen ist, in der Formel:

IV. $$t_1 = 2\sqrt{\frac{\gamma - \alpha}{2g}} \cdot \left\{ E(u_1) - k^2 \,.\, \frac{\sin amu_1 \cos amu_1}{\Delta amu_1} \right\}.$$

Es ist hierbei nur das positive Vorzeichen zu berücksichtigen, weil $\frac{dz}{dt}$ für die aufsteigende Bewegung positiv ist. Die Grenzen der Variabelen entsprechen sich in folgender Weise

$$z \Big| \begin{matrix} z_1 \\ \beta \end{matrix} \quad \dots \varphi \Big| \begin{matrix} \varphi_1 \\ 0 \end{matrix} \quad \dots u \Big| \begin{matrix} u_1 \\ 0 \end{matrix}.$$

Eine zweite Substitution:

$$z = \gamma - (\gamma - \beta)\sin^2\psi,$$

für welche ebenfalls $k^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$ sein möge, transformirt II. in

V. $$dt = \mp \frac{1}{\sqrt{2g}} \left\{ -2\sqrt{\gamma - \alpha} \,.\, \Delta\psi \,.\, d\psi \right\};$$

die entsprechenden Grenzen sind

*) Durège: Theorie der elliptischen Functionen §. 22.

$$z \Big|_{\gamma}^{\beta} \ldots \sin^2\psi \Big|_{0}^{1} \ldots \psi \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

es wächst also ψ bei abnehmenden z. Integriren wir nun von $z = \gamma$ bis $z = z_2$, so erhalten wir die Zeit t_2 von Beginn der fallenden Bewegung von der oberen Grenzebene aus, bis zu dem Moment, wo der bewegliche Punkt bis zur Tiefe $z = z_2$ gefallen ist, in der Formel:

VI. $$t_2 = 2\sqrt{\frac{\gamma - \alpha}{2g}} \cdot E(u_2).$$

Hier war das negative Vorzeichen zu berücksichtigen, weil $\frac{dz}{dt}$ für die fallende Bewegung negativ ist. Die entsprechenden Grenzen sind

$$z \Big|_{\gamma}^{z_2} \ldots \psi \Big|_{0}^{\psi_2} \ldots u \Big|_{0}^{u_2}.$$

Aus den beiden Gleichungen IV. und VI. lassen sich für die Bewegung des Punktes wichtige Resultate herleiten.

Zunächst geben beide für die Zeit, welche der bewegliche Punkt gebraucht, einmal um von der unteren zur oberen Grenzebene zu steigen, das andere mal um von der oberen zur unteren zu fallen, denselben Wert. Denn es entsprechen diesen Fällen folgende Integrationsgrenzen

für IV. $z \Big|_{\beta}^{\gamma} \ldots \varphi \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ldots u \Big|_{0}^{K}$, für V. $z \Big|_{\gamma}^{\beta} \ldots \varphi \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ldots u \Big|_{0}^{K}$,

wo $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$; und weil $\cos am K = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, so folgt aus IV., wie aus VI. unmittelbar (wenn $E(K)$ kurz durch E bezeichnet wird)

VII. $$T = 2\sqrt{\frac{\gamma - \alpha}{2g}} \cdot E$$

Wenn ferner der bewegliche Punkt von irgend einer Höhe ausgehend, nachdem er einmal die obere und einmal die untere Grenzebene passirt, wieder zu derselben Höhe gelangt ist, d. h. wenn z alle Werte von β bis γ einmal aufsteigend und einmal fallend durchlaufen, so wird das Argument u um $2K$ wachsen. Führen wir dies ein, und berücksichtigen die Relationen:

$$\sin am(u+2K) = -\sin amu; \quad \cos am(u+2K) = -\cos amu;$$
$$\Delta am(u+2K) = \Delta amu, \quad E(u+2K) = E(u)+2E;$$

so erhalten wir für die Zeit t', welche der bewegliche Punkt gebraucht, um von der zur Zeit t inne gehabten Höhe z_1 aus, nach einem vollständigen Auf- und Absteigen wieder zur selben Höhe z_1 zu gelangen, aus beiden Eormeln IV. und VI.:

$$t' = t+2T;$$

d. h. das Steigen und Fallen des beweglichen Punktes geht periodisch vor sich; die Dauer einer solchen Periode ist $2T$.

Untersuchen wir noch die Zeiten, welche der bewegliche Punkt gebraucht, einmal um von der unteren Grenzebene bis zur Höhe $z = z_1$ zu steigen, das andere mal um von der oberen bis zur gleichen Tiefe $z = z_1$ zu fallen.

Für das nämliche z geben die beiden angewandten Substitutionsformeln:

$$z = \frac{\beta - \alpha k^2 \sin^2\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi} = \gamma - (\gamma-\beta)\sin^2\psi;$$

hieraus folgt nach einigen Reductionen

$$\cos^2\psi = \sin^2\varphi\,[1 - k^2\sin^2\psi], \quad \text{oder} \quad \sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\Delta\psi};$$

durch Differentiation folgt

$$\cos\varphi\, d\varphi = -k'^2 \frac{\sin\psi}{\Delta^3\psi} d\psi,$$

und da

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = k'\frac{\sin\psi}{\Delta\psi}, \quad \text{und} \quad \Delta\varphi = \frac{k'}{\Delta\psi};$$

so folgt:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\frac{d\psi}{\Delta\psi}.$$

Da die entsprechenden Grenzen $\varphi \Big|_0^{\varphi_1} \ldots \psi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\psi_2}$ sind, so ist

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi_2} \frac{d\psi}{\Delta\psi} = \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta\psi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta\psi} - \int_0^{\psi_2} \frac{d\psi}{\Delta\psi},$$

d. h. $u_1 = K - u_2$ für $z = z_1 = z_2$. Setzen wir daher in VI. für u_2 das Argument $K - u_1$ ein, so erhalten wir den Wert von t_2, welcher der Höhe $z = z_1$ entspricht. Nun ist aber

$$E(K-u) = E - E(u) + k^2 . \frac{\sin amu . \cos amu}{\Delta amu},$$

folglich

$$t_2 = T - t_1;$$

d. h. der bewegliche Punkt braucht dieselbe Zeit, ob er nun von der $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\\text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Grenzebene $\left\{\begin{matrix}\text{fällt}\\\text{steigt}\end{matrix}\right\}$ bis zur Höhe $z = z_1$, oder ob er von der Höhe $z = z_1$ bis zur $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\\text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Grenzebene $\left\{\begin{matrix}\text{steigt}\\\text{fällt}\end{matrix}\right\}$ Das Steigen und Fallen geht symmetrisch in Bezug auf jede Grenzebene vor sich.

Gehen wir nun zur Untersuchung des Winkels ω über. Aus $r^2 d\omega = v_0 \sqrt{2ah} . dt$ und $r^2 = 2az$, folgt unmittelbar mit Rücksicht auf den Wert von dt in II.:

$$d\omega = \mp \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{v_0^2 . h}{a . g}} \cdot \frac{z - \alpha}{z} \cdot \frac{dz}{\sqrt{-(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}}.$$

Berücksichtigen wir, dass

$$\frac{v_0^2 . h}{a . g} = \frac{v_0^2}{2g} \quad h . \frac{1}{\frac{a}{2}} = \frac{\beta . \gamma}{-\alpha},$$

so ergeben sich uns durch Anwendung der beiden oben schon eingeführten Substitutionen:

VIII. $$d\omega = \mp \sqrt{\frac{\beta . \gamma}{-\alpha}} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\beta \sqrt{\gamma - \alpha}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\beta} k^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta \varphi};$$

IX. $$d\omega = \mp \sqrt{\frac{\beta . \gamma}{-\alpha}} \cdot \frac{-\sqrt{\gamma - \alpha}}{\gamma} \cdot \frac{\Delta\psi . d\psi}{1 - \frac{\gamma - \beta}{\gamma} \sin^2 \psi};$$

Integriren wir die Gleichung VIII. von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_1$, so entspricht dies einer steigenden Bewegung des Punktes von $z = \beta$ bis $z = z_1$, wir haben somit das positive Zeichen zu nehmen. Bei der Gleichung IX. würde dagegen das negative Zeichen zu wählen sein, wenn wir integriren wollten zwischen den Grenzen $\psi \Big|_0^{\psi_2}$, da diesen

die fallende Bewegung des Punktes von $z = \gamma$ bis $z = z_2$ entsprechen würde. Der Winkel w wird selbstverständlich immer vom Ausgangspunkt der Bewegung an gerechnet.

Bezeichnen wird kurz $-\frac{\alpha}{\beta}k^2$ und $-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}$ beziehungsweise mit m und n, so ist die nächste Aufgabe, die beiden Integrale

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{1}{1+m\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \text{und} \quad \int_0^{\varphi_2} \frac{\Delta\psi\,.\,d\psi}{1+n\sin^2\psi}$$

auf die Normalform zu reduciren.

Das erste verwandelt sich durch die Identität $\frac{1}{1+m\sin^2\varphi} = 1 - \frac{m\sin^2\varphi}{1+m\sin^2\varphi}$,

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{1}{1+m\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^{\varphi_1}\frac{m\sin^2\varphi}{1+m\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Setzen wir $m = -k^2\sin amA$, so wird durch Einführung von $\varphi_1 = amu_1$

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{1}{1+m\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u_1 + \int_0^{u_1}\frac{k^2\,.\,\sin^2amA\,.\,\sin^2amu_1}{1-k^2\sin^2amA\,.\,\sin^2amu_1}\cdot du_1$$

$$= u_1 + \frac{\operatorname{tang} amA}{\Delta amA}\cdot\int_0^{u_1}\frac{k^2\,.\,\sin amA\,.\cos amA\,.\,\Delta amA\,.\,\sin^2amu_1}{1-k^2\sin^2amA\,.\,\sin^2amu_1}\,.\,du_1;$$

oder nach Jacobi's Bezeichnung

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{1}{1+m\sin^2\varphi} = u_1 + \frac{\operatorname{tang} amA}{\Delta amA}\,.\,\Pi(u_1, A).$$

Das zweite Integral wird durch folgende Identitäten reducirt:

$$\frac{\Delta\psi\,.\,d\psi}{1+n\sin^2\psi} = \frac{1+n\sin^2\psi-(n+k^2)\sin^2\psi}{1+n\sin^2\psi}\cdot\frac{d\psi}{\Delta\psi}$$

$$= \frac{d\psi}{\Delta\psi} - \frac{n+k^2}{n}\cdot\frac{n\sin^2\psi}{1+n\sin^2\psi}\cdot\frac{d\psi}{\Delta\psi}.$$

Setzen wir $n = -k^2\sin^2amB$, und führen $\psi_2 = amu_2$ ein, so wird

$$\int_0^{\psi_2}\frac{\Delta\psi\,d\psi}{1+n\sin^2\psi} = u_2 + \frac{n+k^2}{n}\cdot\frac{\operatorname{tang} amB}{\Delta amB}\,.\,\Pi(u_2, B).$$

Nun ist

$$m = -\frac{\alpha}{\beta}k^2 = -k^2\sin^2 amA$$

also

$$\operatorname{tang}^2 amA = \frac{\alpha}{\beta-\alpha};$$

$$\Delta^2 amA = \frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha},$$

und ebenso

$$n = -\frac{\gamma-\beta}{\gamma} = -k^2\sin^2 amB$$

also

$$\operatorname{tang}^2 amB = \frac{\gamma-\alpha}{\alpha}$$

$$\Delta^2 amB = \frac{\beta}{\gamma};\quad \frac{n+k^2}{n} = \frac{-\alpha}{\gamma-\alpha}.$$

Es lassen sich also die Integrale von VIII. und IX. folgendermassen ausdrücken (da $\frac{1}{i} = -i$):

VIII'. $$\omega_1 = \sqrt{\frac{\beta\cdot\gamma}{-\alpha}}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\beta\sqrt{\gamma-\alpha}}\cdot u_1 + i.\,\Pi(u_1, A);$$

IX'. $$\omega_2 = \sqrt{\frac{\beta\cdot\gamma}{-\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{\gamma}\cdot u_2 - i.\,\Pi(u_2, B).$$

Noch sind die Parameter A und B zu discutiren. Aus den Substitutionen

$$-\frac{\gamma-\beta}{\gamma} = -k^2\sin^2 amB,\quad -\frac{\alpha}{\beta}k^2 = -k^2\sin^2 amA$$

geht hervor, dass A und B nicht reell sein können, weil weder $-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}$ noch $-\frac{\alpha}{\beta}k^2$ zwischen den Grenzen 0 und $-k^2$ liegt. Es ist $-\frac{\alpha}{\beta}k^2$ stets positiv, und $-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}$ zwar negativ aber dem absoluten Werte nach grösser als k^2. Wir müssen demnach setzen

$$A = iA,\quad \text{und}\quad B = K + iB.$$

Es ist aber leicht zu zeigen, dass $B = -A$ sein muss. Denn $-\frac{\alpha}{\beta}k^2$ und $-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}$ sind die negativen reciproken Werte von $\sin^2\varphi$ und $\sin^2\psi$, die demselben Werte von z, nämlich $z = 0$, entsprechen; wie unmittelbar an den Substitutionsformeln ersichtlich. Für solche Werte haben wir aber oben nachgewiesen, dass die Argumente die Relation

$$u_2 = K - u_1$$

erfüllen müssen. Das ist für iA und $K + iB$ nur dann möglich, wenn $B = -A$. Bezeichnen wir die constanten Coefficienten kurz, wie folgt:

$$C = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{-\alpha}} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\beta\sqrt{\gamma - \alpha}} \quad \text{und} \quad C' = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{-\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{\gamma},$$

so haben wir

X. $\omega_1 = Cu_1 + i\,\Pi(u_1, iA)$

XI. $\omega_2 = C'u_2 - i\,\Pi(u_2, K - iA)$

worin $\sin^2 am\, iA = \frac{\alpha}{\beta}$.

Zur weiteren Untersuchung führen wir die beiden Functionen $Z(u)$ und $\Theta(u)$ ein, welche mit dem Integrale Π durch folgende Relation verbunden sind:

$$\Pi(u, a) = uZ(a) + \tfrac{1}{2} \lg \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)},$$

und ausserdem noch die Eigenschaften besitzen, dass

$$\Theta(u) = \Theta(-u); \quad \Theta(u + K) = \Theta(u - K);$$
$$\Theta(u - 2K) = \Theta(u) = \Theta(u + 2K);$$
$$Z(-u) = -Z(u); \quad Z(0) = Z(K) = 0; \quad Z(u) = Z(u + 2K);$$
$$Z(K + u) = -Z(K - u).$$

Die Gleichungen X. und XI. werden dadurch zu

$$\omega_1 = [C + iZ(iA)]\,u_1 + \tfrac{1}{2} i \lg \frac{\Theta(u_1 - iA)}{\Theta(u_1 + iA)};$$

$$\omega_2 = [C' - iZ(K - iA)]\,u_2 - \tfrac{1}{2} i \lg \frac{\Theta(u_2 - K + iA)}{\Theta(u_2 + K - iA)}.$$

Für die Coefficienten von u_1 und u_2 erhält man Umformungen durch die Relationen

$$iZ(iA) = -\operatorname{tang} am(A, k') \cdot \Delta am(A, k') + \frac{\pi A}{2K \cdot K'} + Z(A, k');$$

$$iZ(K - iA) = +k'^2 \frac{\sin am(A, k') \cdot \cos am(A, k')}{\Delta am(A, k')} - \frac{\pi A}{2K \cdot K'} - Z(A, k').$$

Es ist nämlich

$$\operatorname{tang} am(A, k') \cdot \Delta am(A, k') = \sqrt{\frac{-\alpha\gamma}{\beta(\gamma - \alpha)}}$$

und

$$k'^2 \frac{\sin am(A, k') \cdot \cos am(A, k')}{\Delta am(A, k')} = \sqrt{\frac{-\alpha\beta}{\gamma(\gamma - \alpha)}},$$

wie leicht aus $\sin^2 am(K - iA) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma}$ gefunden wird.

Mit Rücksicht hierauf wird

$$C+iZ(iA)=\sqrt{\frac{\beta\gamma}{-\alpha}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma-\alpha}}+\frac{\pi A}{2K.K'}+Z(A,k')=C'-iZ(K-iA).$$

Bezeichnen wir diesen Wert kurz durch P, so werden unsere Gleichungen X. und XI. folgende Gestalt annehmen:

X'. $$\omega_1=P.u_1+\tfrac{1}{2}i\lg\frac{\Theta(u_1-iA)}{\Theta(u_1+iA)};$$

XI'. $$\omega_2=P.u_2-\tfrac{1}{2}i\lg\frac{\Theta(u_2-K+iA)}{\Theta(u_2+K-iA)}.$$

In dieser Form lassen sie unmittelbar mehrere Eigentümlichkeiten der Bahn unseres beweglichen Punktes erkennen.

Erstens nämlich ist der vom Radiusvector beschriebene Winkel Ω, wenn der bewegliche Punkt von der unteren zur oberen Grenzebene steigt, derselbe als wenn er von der oberen zur unteren fällt. Denn beide Gleichungen geben für das Argument $u=K$ den Wert

XII. $$\Omega=P.K.$$

Lassen wir ferner das Argument um $2K$ wachsen, so erhalten wir mit Rücksicht auf die oben angeführten Relationen der Θ-Functionen:

$$\omega'=\omega+2\Omega;$$

d. h. der Winkel ω wächst in Perioden, und zwar entspricht der früher schon gefundenen Periode $2T$ der Winkel 2Ω.

Um den Winkel zu finden, den der Radiusvector beschreibt, einmal wenn der bewegliche Punkt von der $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\\text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Grenzebene $\left\{\begin{matrix}\text{fällt}\\\text{steigt}\end{matrix}\right\}$ bis zur Höhe $z=z_1$, das andere mal wenn er von dieser Höhe $z=z_1$ zur $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\\text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Grenzebene $\left\{\begin{matrix}\text{steigt}\\\text{fällt}\end{matrix}\right\}$, bedienen wir uns der oben gefundenen Relation $u_1=K-u_2$. Dieselbe in X'. eingesetzt ergiebt

$$\omega_1=\Omega-\omega_2;$$

dies Resultat sagt aus, dass das Wachsen des Winkels ω symmetrisch zu jeder Grenzebene vor sich geht; der Radiusvector beschreibt in beiden eben gesuchten Fällen denselben Winkel.

Eine zur Beurteilung der Abhängigkeit des Winkels w von der

Zeit t sehr vorteilhafte Umformung von X'. und XI'. lässt sich leicht mit Hülfe der Relation

$$u = \frac{K}{E}[E(u) - Z(u)]$$

vornehmen; es wird dadurch

$$\omega_1 = \frac{PK}{E}\left[E(u_1) - k^2 \frac{\sin am u_1 . \cos am u_1}{\Delta am u_1}\right] + \left[\tfrac{1}{2} i \lg \frac{\Theta(u_1 - iA)}{\Theta(u_1 + iA)} + \frac{PK}{E}\left\{k^2 \frac{\sin am u_1 . \cos am u_1}{\Delta am u_1} - Z(u_1)\right\}\right],$$

$$\omega_2 = \frac{PK}{E} E(u_2) - \left[\tfrac{1}{2} i \lg \frac{\Theta(u_2 - K + iA)}{\Theta(u_2 + K - iA)} + \frac{PK}{E} Z(u_2)\right]$$

oder mit Rücksicht auf IV., VI., VII., XII.

$$\omega_1 = \frac{\Omega}{T} t + \left[\tfrac{1}{2} i \lg \frac{\Theta(u_1 - iA)}{\Theta(u_1 + iA)} + \frac{PK}{E}\left\{k^2 \frac{\sin am u_1 . \cos am u_1}{\Delta am u_1} - Z(u_1)\right\}\right],$$

$$\omega_2 = \frac{\Omega}{T} t - \left[\tfrac{1}{2} i \lg \frac{\Theta(u_2 - K + iA)}{\Theta(u_2 + K - iA)} + \frac{PK}{E} Z(u_2)\right].$$

In beiden Gleichungen haben wir dasselbe Glied $\frac{\Omega}{T} t$, welches der Zeit t proportional ist; dazu kommt noch ein periodisch wachsendes und abnehmendes Glied. Für $u = 0, K, 2K, \ldots$ verschwindet das periodische Glied. Denken wir uns nun die Meridianebene des z. B. in der unteren Grenzebene liegenden Ausgangspunktes der Bewegung gleichzeitig mit dem beweglichen Punkte, nach derselben Richtung hin, mit der constanten Geschwindigkeit $\frac{\Omega}{T}$, in Bewegung gesetzt, so wird der bewegliche Punkt anfangs der Ebene vorauseilen, seine Geschwindigkeit wird sich aber immer mehr verringern, so dass er bei seiner Ankunft in der oberen Grenzebene von der Meridianebene wieder eingeholt wird. Von da aus wiederholt sich symmetrisch das Umgekehrte, der Punkt bleibt anfangs zurück, mit wachsender Geschwindigkeit jedoch eilt er der Ebene nach, um sie in der unteren Grenzebene wieder zu erreichen. Das periodische Glied giebt immer den Winkel $\Delta\omega$ an, um welchen der Radiusvector von der beweglichen Meridianebene absteht. Auch von diesem Winkel lässt sich unmittelbar durch Vergrösserung des Argumentes um $2K$ und durch Anwendung der Relation $u_2 = K - u_1$ nachweisen, dass diese Differenzen $\Delta\omega$ periodisch nach $2T$ sich wiederholen, und ihrer Grösse nach symmetrisch gegen die beiden Grenzebenen verteilt sind. Letzteres wird sofort ersichtlich durch Anwendung der Gleichung

$$Z(K-u) = k^2 \frac{\sin am u \,.\, \cos am u}{\Delta am u} - Z(u).$$

Der Winkel τ zwischen der Bahn- und Parallelkreistangente ergiebt sich aus IX. §. 1. unmittelbar durch Einsetzen der Werte $f(z) = \sqrt{2az}$ und $f(h) = \sqrt{2ah}$, nämlich

$$\cos\tau = \sqrt{\frac{\frac{v_0^2}{2g} h}{z\left(h + \frac{v_0^2}{2g} - z\right)}} = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{z(\beta+\gamma-z)}}.$$

Es wird $\tau = 0$ für $z = \beta$ und $z = \gamma$, d. h. die Bahn berührt die beiden den Grenzebenen entsprechenden Parallelkreise. Weiter ergiebt sich leicht durch Differentiation, dass

τ für $z = \frac{\beta+\gamma}{2}$ das Maximum seiner absoluten Grösse erreicht.

Der Winkel τ ändert sich also in folgender Weise: in der unteren Grenzebene ist er Null, beim Steigen des Punktes wächst er bis zu $z = \frac{\beta+\gamma}{2}$, wo er den Wert $\sin\tau = \frac{\gamma-\beta}{\gamma+\beta}$ annimmt; von da bis zur oberen Grenzebene nimmt er wieder bis Null ab. Während τ bis jetzt oberhalb des Parallelkreises lag, befindet er sich beim Fallen des Punktes immer unterhalb desselben, erreicht wieder in der Mittelebene $\frac{\beta+\gamma}{2} = z$ sein Maximum und nimmt von da wieder ab, bis er in der unteren Grenzebene wieder zu Null wird. Immer aber hat τ in demselben Parallelkreise denselben Wert, nur liegt er abwechselnd ober- und unterhalb des Parallelkreises.

Aus dem Maximalwert $\sin\tau = \frac{\gamma-\beta}{\gamma+\beta}$ ersieht man, dass für $\gamma = \beta$ $\tau = 0$ ist; wie auch natürlich, da der Punkt in diesem Falle einen Parallelkreis beschreibt. Den Wert $\frac{\pi}{2}$ kann τ nur annehmen, wenn $\beta = 0$ ist; dies ist aber nur möglich, wenn $v_0 = 0$ oder $h = 0$; ersteres würde die Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit sein, wo der Punkt auf einem Meridian sich bewegen müsste; das zweite würde ebenfalls eine Bewegung auf einem Meridian bedingen, da im Scheitelpunkt des Paraboloids eine jede Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit der Tangente eines Meridians zusammenfällt, der Punkt also auch immer in der verticalen Ebene desselben verbleiben muss. In beiden Fällen ist aber offenbar der Winkel $\tau = \frac{\pi}{2}$.

Da auch die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes für jedes z den gleichen Wert hat, wie Gleichung

$$v^2 = 2g(h-z)+{v_0}^2$$

zeigt, so können wir die sämmtlichen bis hierher erhaltenen Resultate kurz in die folgende Tabelle zusammenfassen, aus welcher die Eigentümlichkeiten der Bahn und der Bewegung des Punktes klar ersichtlich werden.

für	z =	β	z_1	γ	z_1	β	z_1	γ	z_1	β
	u =	0	u_1	K	$2K-u_1$	$2K$	$2K+u_1$	$3K$	$4K-u_1$	$4K$
	t =	0	t_1	T	$2T-t_1$	$2T$	$2T+t_1$	$3T$	$4T-t_1$	$4T$
ist	ω =	0	ω_1	Ω	$2\Omega-\omega_1$	2Ω	$2\Omega+\omega_1$	3Ω	$4\Omega-\omega_1$	4Ω
	$\Delta\omega$ =	0	$+\Delta\omega_1$	0	$-\Delta\omega_1$	0	$+\Delta\omega_1$	0	$-\Delta\omega_1$	0
	τ =	0	τ_1	0	$-\tau_1$	0	$+\tau_1$	0	$-\tau_1$	0
	v =	v_β	v_1	v_γ	v_1	v_β	v_1	v_γ	v_1	v_β

Man liest aus dieser Tabelle sofort ab, dass die Bahn, welche der bewegliche Punkt beschreibt, periodisch aus congruenten Stücken besteht, die sich in der Weise zu einem Ganzen verbinden, dass eine in einer Grenzebene beginnende Periode durch den Berührungspunkt mit der anderen Grenzebene in zwei symmetrische Hälften geteilt wird.

Der Winkel Ω lässt eine einfache Grenzbestimmung desselben zu mit Hülfe des sogenannten Maximum-Minimum-Theorems. Zu dem Ende gehen wir zurück auf Formel IX., welche zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ integrirt Ω giebt.

$$\Omega = \sqrt{\frac{\beta\cdot\gamma}{-\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{\gamma}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Delta\psi\, d\psi}{1-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}\sin^2\psi}.$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Delta\psi\, d\psi}{1-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}\sin^2\psi} = R\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{1-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}\sin^2\psi},$$

wenn R ein Wert von $\Delta\psi$ ist, der zwischen dem grössten und kleinsten Werte von $\Delta\psi$ liegt, welche diese Function innerhalb des Intervalls $\left|_0^{\frac{\pi}{2}}\right.$ annimmt; dies sind aber

$$1 > R > \sqrt{1-k^2}.$$

Das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{1-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}\sin^2\psi}$ geht durch die Substitution $\sin\psi = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}$ über in

$$\int_0^{\infty} \frac{d\eta}{1+\frac{\beta}{\gamma}\eta^2} = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\left\{\operatorname{arctang}\eta\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\right\}_0^{\infty} = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

so dass wir für Ω folgende Grenzbestimmung erhalten:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\gamma}{-\alpha}} > \Omega > \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\beta}{-\alpha}}$$

Da α eine negative Grösse ist, so folgt hieraus, dass der Winkel einer Periode (2Ω) immer grösser ist als 180^0. Es werden demnach die höchsten und tiefsten Punkte der Bahn auf den zugehörigen Parallelkreisen (nach Art des Foucault'schen Pendelversuches) ein Vorrücken im Sinne der Bewegung erleiden. Der bewegliche Punkt kann nur dann wieder zu seinem Ausgangspunkte zurückkehren, wenn Ω in einem rationalen Verhältnisse zu π steht.

§. 3. **Bewegung auf dem Rotationskegel.**

Legen wir das Coordinatensystem so, dass die Rotationsaxe zur Axe der z und die Spitze des Kegels zum Anfangspunkt der Coordinaten wird, so ist

$$x^2+y^2 = z^2.\operatorname{tang}^2\delta$$

die Gleichung des Kegels; δ ist der Winkel zwischen Generatrix und Axe.

Zunächst sei wieder die Einschränkung auf die obere nach oben offene Hälfte des Kegels gemacht; da für die untere dieselben Bemerkungen gelten, wie für das Paraboloid auf der Seite der negativen z.

Setzen wir in die betreffenden Gleichungen des §. 1.

$$f(z) = z.\operatorname{tang}\delta, \quad f'(z) = \operatorname{tang}\delta, \quad f(h) = h.\operatorname{tang}\delta$$

ein, so erhalten wir

I. $$\frac{dz}{dt} = \mp \cos\delta \,.\, \sqrt{2g} \,.\, \frac{\sqrt{(h-z)\left(z^2 - z\frac{v_0^2}{2g} - h\frac{v_0^2}{2g}\right)}}{z}.$$

Das Trinom 2ten Grades $z^2 - z\frac{v_0^2}{2g} - h\frac{v_0^2}{2g}$ ist gleich $(z-z_1)(z-z_2)$, wenn

$$z_1 = \frac{v_0}{4g}[\sqrt{v_0^2} + \sqrt{v_0^2 + 8hg}], \quad z_2 = \frac{v_0}{4g}[\sqrt{v_0^2} - \sqrt{v_0^2 + 8hg}];$$

und zwar ist $z_1 \gtrless h$, jenachdem $v_0 \gtrless \sqrt{hg}$.

Bezeichnen wir also wieder

z_1 mit γ, h mit β, wenn $v_0 > \sqrt{hg}$,

z_1 „ β, h „ γ, „ „ $v_0 < \sqrt{hg}$,

in beiden Fällen aber z_2 mit α, [z_2 ist negativ, da $h > 0$ sein muss], so haben wir nun

II. $$\frac{dz}{dt} = \mp \cos\delta \sqrt{2g} \,.\, \frac{1}{z}\sqrt{-(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}; \quad [\alpha < 0 < \beta < \gamma]$$

Da z nicht negativ werden kann (mit Rücksicht auf die gemachte Einschränkung), so wird $\frac{dz}{dt} = 0$ nur für $z = \beta$ und $z = \gamma$. Bildet man die Beschleunigungscomponente $\frac{d^2z}{dt^2}$ und setzt diese Werte ein, so findet man:

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{z=\beta} > 0; \quad \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{z=\gamma} < 0,$$

d. h. $z = \gamma$ ist ein Maximum, $z = \beta$ ein Minimum für z. Der bewegliche Punkt oscillirt auch hier wieder zwischen zwei Grenzebenen, $z = \beta$ der unteren, $z = \gamma$ der oberen. Für den Fall $v_0 = \sqrt{hg}$ fallen beide Ebenen zusammen, d. h. der Punkt beschreibt einen Parallelkreis; die Umlaufszeit wird in diesem Falle $T = 2\pi \,.\, \tang\delta \,.\, \sqrt{\frac{h}{g}}$, ist also von der Höhe abhängig.

Zur Bestimmung der Zeit t bilden wir aus II

III. $$dt = \mp \frac{1}{\cos\delta \,.\, \sqrt{2g}} \,.\, \frac{z\,.\,dz}{\sqrt{-(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}},$$

und transformiren dies durch dieselben Substitutionsformeln wie in §. 2.

$$z = \frac{\beta - \alpha k^2 \sin^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \quad k^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} \quad \text{giebt}$$

IV. $$dt = \frac{2}{\cos\delta \cdot \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \cdot \frac{\beta - \alpha k^2 \sin^2\varphi}{\Delta^3\varphi} d\varphi,$$

$$z = \gamma - (\gamma - \beta)\sin^2\psi, \quad k^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} \quad \text{giebt}$$

V. $$dt = \frac{2}{\cos\delta \cdot \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \cdot \frac{\gamma - (\gamma - \beta)\sin^2\psi}{\Delta\psi} d\psi.$$

Hierin ist wieder das Vorzeichen entsprechend einer steigenden oder fallenden Bewegung gewählt; es sind nämlich die entsprechenden Grenzen der Variabeln $z \Big| \begin{matrix} \gamma \\ \beta \end{matrix} \ldots \varphi \Big| \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{matrix}$, $z \Big| \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \ldots \psi \Big| \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{matrix}$.

Nach einigen Umformungen, analog denen in §. 2., ergiebt sich:

IV′. $$dt = \frac{2}{\cos\delta \cdot \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \left\{ \alpha \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + (\beta - \alpha) \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} \right\}$$

V′. $$dt = \frac{2}{\cos\delta \cdot \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \left\{ \alpha \frac{d\psi}{\Delta\psi} + (\gamma - \alpha) \Delta\psi\, d\psi \right\}.$$

Integriren wir nun IV′. für eine steigende Bewegung, V′. für eine fallende, und erinnern uns des in §. 2. benutzten Ausdruckes für $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi}$, so wird

VI.
$$t_1 = \frac{2}{\cos\delta \cdot \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \left\{ \alpha . u_1 + (\gamma - \alpha) \left[E(u_1) - k^2 \frac{\sin am u_1 \cos am u_1}{\Delta am u_1} \right] \right\}$$

VII. $$t_2 = \frac{2}{\cos\delta \cdot \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \{ \alpha . u_2 + (\gamma - \alpha) E(u_2) \}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt zunächst der gleiche Wert von T, welchen der Punkt braucht, einmal um von der unteren Grenzebene zur oberen zu steigen, das andremal um von der oberen zur unteren zu fallen, nämlich

VIII. $$T = \frac{2}{\cos\delta \cdot \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \{ \alpha . K + (\gamma - \alpha) E \}.$$

Ferner ergiebt das Wachsen des Argumentes u um $2K$ folgende Relation:

$$t' = t + 2T,$$

d. h. das Steigen und Fallen ist periodisch nach $2T$.

Ebenso folgt die Symmetrie in Bezug auf die Grenzebenen ganz analog §. 2. durch Anwendung der Relation $u_2 = K - u_1$. Die Entwicklungen dieser Resultate mögen hier übergangen werden, da sie genau so wie in §. 2. erfolgen.

Der Winkel ω bestimmt sich aus den Gleichungen $r = z.\tang\delta$, $r^2 d\omega = v_0.\tang\delta.h.dt$, mit Rücksicht auf III,

$$\text{IX.} \qquad d\omega = \mp \frac{v_0.h}{\sin\delta.\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{-(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}}$$

Dieser Ausdruck formt sich durch die beiden Substitutionen

$$z = \frac{\beta - \alpha k^2 \sin^2\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi} \quad \text{zu} \quad d\omega_1 = \frac{2.v_0.h}{\sin\delta.\sqrt{2g(\gamma-\alpha)}} \cdot \frac{\Delta\varphi\, d\varphi}{\beta - \alpha k^2\sin^2\varphi}.$$

$$z = \gamma - (\gamma-\beta)\sin^2\psi \quad \text{zu} \quad d\omega_2 = \frac{2.v_0.h}{\sin\delta.\sqrt{2g(\gamma-\alpha)}} \cdot \frac{d\psi}{[\gamma-(\gamma-\beta)\sin^2\psi]\Delta\psi}.$$

Der constante Coefficient transformirt sich leicht, mit Rücksicht auf $z_1.z_2 = -\frac{v_0^2}{2g}h$; es wird

$$\frac{2.v_0.h}{\sin\delta.\sqrt{2g(\gamma-\alpha)}} = \frac{2}{\sin\delta.\sqrt{\gamma-\alpha}}\sqrt{-\alpha\beta\gamma}.$$

Nach einigen Umformungen erhalten wir somit

$$d\omega_1 = \frac{2\sqrt{-\alpha\gamma}}{\sin\delta.\sqrt{(\gamma-\alpha)\beta}} \cdot \frac{1}{\alpha}\left\{\beta\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - (\beta-\alpha)\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}k^2\sin^2\varphi\right)\Delta\varphi}\right\},$$

$$d\omega_2 = \frac{2\sqrt{-\alpha\beta}}{\sin\delta.\sqrt{(\gamma-\alpha)\gamma}} \cdot \frac{d\psi}{\left[1-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}\sin^2\psi\right]\Delta\psi}$$

Integriren wir die erste Gleichung für eine steigende, die zweite für eine fallende Bewegung, so erhalten wir mit Rücksicht auf die in §. 2. gegebene Relation für das Integral $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+m\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$, wenn

$-\frac{\alpha}{\beta}k^2 = -k^2\sin^2 amA$ und $-\frac{\gamma-\beta}{\gamma} = -k^2\sin^2 amB$ gesetzt wird:

$$\omega_1 = \frac{2}{\sin\delta}\sqrt{\frac{-\alpha\gamma}{\beta(\gamma-\alpha)}}\left\{u_1 + \frac{(\beta-\alpha)}{-\alpha}\cdot\frac{\operatorname{tang} amA}{\Delta amA}\,\Pi(u_1, A)\right\},$$

$$\omega_2 = \frac{2}{\sin\delta}\sqrt{\frac{-\alpha\beta}{\gamma(\gamma-\alpha)}}\left\{u_2 + \frac{\operatorname{tang} amB}{\Delta amB}\,\Pi(u_2, B)\right\}.$$

Nun ist, wie in §. 2. schon gefunden,

$$\frac{\operatorname{tang} amA}{\Delta amA} = \sqrt{\frac{\alpha\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma}}\cdot\frac{1}{\beta-\alpha}, \quad \text{und}$$

$$\frac{\operatorname{tang} amB}{\Delta amB} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\gamma(\gamma-\alpha)}{-\alpha\beta}} = -i\sqrt{\frac{\gamma(\gamma-\alpha)}{-\alpha\beta}};$$

somit erhalten wir:

$$\omega_1 = \frac{2}{\sin\delta}\left\{\sqrt{\frac{-\alpha\gamma}{\beta(\gamma-\alpha)}}\cdot u_1 + i\Pi(u_1, A)\right\},$$

$$\omega_2 = \frac{2}{\sin\delta}\left\{\sqrt{\frac{-\alpha\beta}{\gamma(\gamma-\alpha)}}\cdot u_1 - i\Pi(u_2, B)\right\}.$$

Die Parameter A und B haben wieder dieselben Werte wie in §. 2., es ist also: $A = iA$, $B = K - iA$; demnach

$$i\Pi(u_1, A) = u_1 . iZ(iA) + \tfrac{1}{2}i . \lg\frac{\Theta(u_1 - iA)}{\Theta(u_1 + iA)},$$

$$i\Pi(u_2, B) = u_2 . iZ(K - iA) + \tfrac{1}{2}i . \lg\frac{\Theta(u_2 - K + iA)}{\Theta(u_2 + K - iA)}.$$

Hiermit die Ausdrücke für $iZ(iA)$ und $iZ(K - iA)$ aus §. 2. verbunden und das Ganze in die Gleichungen für ω eingeführt ergiebt:

X. $$\omega_1 = \frac{2}{\sin\delta}\left\{\left[\frac{\pi A}{2KK'} + Z(A, k')\right]u_1 + \tfrac{1}{2}i . \lg\frac{\Theta(u_1 - iA)}{\Theta(u_1 + iA)}\right\},$$

XI. $$\omega_2 = \frac{2}{\sin\delta}\left\{\left[\frac{\pi A}{2KK'} + Z(A, k')\right]u_2 - \tfrac{1}{2}i . \lg\frac{\Theta(u_2 - K + iA)}{\Theta(u_2 + K - iA)}\right\}.$$

Beide Gleichungen ergeben sofort für den Winkel Ω, welchen der Radiusvector bei der Bewegung des Punktes einmal von der unteren Grenzebene zur oberen, das andremal von der oberen zur unteren, beschreibt, denselben Wert

XII. $$\Omega = \frac{2}{\sin\delta}PK; \qquad \left[P = \frac{\pi A}{2KK'} + Z(A, k')\right]$$

Ganz analog den Entwicklungen in §. 2. folgt dann durch Vermehrung des Argumentes u um $2K$ die Periodicität des Winkels ω

indem der Periode $2T$ eine ebensolche des Winkels 2Ω entspricht. Auch das Gesetz der Symmetrie für den Winkel ω in Bezug auf die beiden Grenzebenen folgt auf die frühere Weise.

Der Winkel τ zwischen Bahn- und Parallelkreistangente bestimmt sich leicht zu

$$\cos\tau = \frac{v_0 h}{z\sqrt{2g(h-z)+v_0^2}} = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{-\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma-z}}.$$

Die Bewegung wird nach den bis jetzt erhaltenen Resultaten, in ihrer allgemeinen Gestalt hinlänglich bestimmt sein; es gelten für dieselbe ebenfalls die am Ende des §. 2. entworfene Tabelle und daraus gezogenen Resultate.

Zum Schluss möge noch auf die Abhängigkeit der Zeit t und des Winkels ω von dem Winkel δ hingewiesen werden. Die Zeit ist unter sonst gleichen Umständen umgekehrt proportional dem $\cos\delta$ d. h. sie wächst mit δ; der Winkel ω dagegen umgekehrt proportional dem $\sin\delta$ d. h. nimmt ab bei wachsendem δ. Für dasselbe β und γ ergiebt sich, dass die Bahn des beweglichen Punktes auf dem Kegel für ein grösseres δ ein immer breiteres Ringstück mit immer grösserem Radius ausfüllt; woraus jene Abhängigkeit leicht erklärlich wird.